DINÁMICA DE ENDEUDAMIENTO:

De la restricción presupuestaria del gobierno:

$$P_t G_t + r_t B_{t-1} = T_t + B_t - B_{t-1} + M_t - M_{t-1}$$

donde

G_t : gasto público en términos reales

P_t : índice de precios

B_t : stock de deuda en el instante t

r_t : tipo de interés nominal de la deuda

M_t : cantidad de dinero en el instante t

T_t : ingresos impositivos

si dividimos por el PIB nominal ($P_t Y_t$):

$$\frac{P_t G_t - T_t}{P_t Y_t} = \frac{B_t - (1 + r_t) B_{t-1}}{P_t Y_t} + \frac{M_t - M_{t-1}}{P_t Y_t}.$$

Teniendo en cuenta las siguientes definiciones y supuestos:

1)

$P_t D_t \equiv$ Déficit primario

$d_t \equiv \frac{P_t D_t}{P_t Y_t}$: déficit primario en términos reales y como porcentaje del PIB

$b_t \equiv \frac{B_t}{P_t Y_t}$: stock de deuda en términos reales y como porcentaje del PIB

$m_t \equiv \frac{M_t}{P_t Y_t}$: saldos reales como porcentaje del PIB o inversa de la velocidad de circulación del dinero

2) Suponiendo que

$$d_t = d, \frac{Y_t}{Y_{t-1}} = 1+n, \frac{M_t}{M_{t-1}} = 1+\theta, m_t = m, \forall t,$$

lo cual implica:

$$m_t = m, \forall t \Rightarrow m_t = m_{t-1} \Rightarrow \frac{M_t}{P_t Y_t} = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} Y_{t-1}} \Rightarrow$$

$$\frac{M_t}{M_{t-1}} = \frac{P_t Y_t}{P_{t-1} Y_{t-1}} \Rightarrow 1+\theta = (1+\pi)(1+n),$$

donde hemos supuesto que el crecimiento monetario es constante, para mantener constante la tasa de inflación;

3) $$\frac{(1+r_t)B_{t-1}}{P_t Y_t} = \frac{(1+r_t)B_{t-1}}{P_{t-1} Y_{t-1}} \frac{P_{t-1} Y_{t-1}}{P_t Y_t} = (1+r_t) b_{t-1} \frac{1}{(1+\pi)(1+n)} =$$

$$= b_{t-1} \frac{(1+R)}{(1+n)},$$

donde hemos supuesto que $(1+R) = \frac{1+r}{1+\pi}$, con $r_t = r, \forall t$,

4) $$\frac{M_{t-1}}{P_t Y_t} = \frac{M_{t-1}}{P_{t-1} Y_{t-1}} \frac{P_{t-1} Y_{t-1}}{P_t Y_t} = m \frac{1}{(1+\pi)(1+n)} = m \frac{1}{(1+\theta)},$$

podemos reescribir la restricción de gobierno como:

$d = b_t - \frac{1+R}{1+n} b_{t-1} + m - m \frac{1}{(1+\theta)}$, es decir,

$\boxed{b_t = \left[d - m \frac{\theta}{(1+\theta)} \right] + \frac{1+R}{1+n} b_{t-1},}$ si la autoridad fiscal puede apelar al banco central (B.C.), ó

$\boxed{b_t = d + \frac{1+R}{1+n} b_{t-1},}$ si la autoridad fiscal no puede apelar al banco central.

STOCK DE DEUDA DE ESTADO ESTACIONARIO

Un stock de deuda de estado estacionario es aquel nivel de endeudamiento tal que si en algún instante *t* es alcanzado, permanecerá indefinidamente en ese nivel si no cambia nada.

$$b^* = \frac{d - m\dfrac{\theta}{1+\theta}}{1-\dfrac{1+R}{1+n}},\ \text{si la autoridad fiscal puede apelar al B.C.}$$

$$b^* = \frac{d}{1-\dfrac{1+R}{1+n}},\ \text{si la autoridad fiscal no puede apelar al B.C.}$$

ESTUDIO DE LA DINÁMICA:

Previo: solución de la ecuación dinámica:

$$\boxed{b_t = b^* + \left(\frac{1+R}{1+n}\right)^t (b_0 - b^*)}$$

- Si $R<n$ (dinámica estable):

$$\lim_{t\to\infty} b_t = b^*;\ \text{si } b_0 > b^* \Rightarrow b_t \geq b^*, \forall t$$
$$\text{si } b_0 < b^* \Rightarrow b_t \leq b^*, \forall t$$

- Si $R>n$ (dinámica inestable):

$$\lim_{t\to\infty} b_t = \begin{cases} \infty, & \text{si } b_0 > b^* \\ -\infty, & \text{si } b_0 < b^* \end{cases}$$

Amortización de la deuda cuando b_0>0:

- Si R<n:
  Existe un instante de tiempo finito para el cual el nivel de endeudamiento se hace cero. Para ello debe ocurrir que $b^* < 0$, es decir, que $d < 0$ (en el caso que la autoridad fiscal no pueda apelar al banco central) o que $d - m(\theta/(1+\theta))$<0 (en el caso en que la autoridad fiscal sí pueda apelar al banco central). El tiempo que tarda en amortizarse la deuda será:

$$\left\{t^* : b_{t^*} = 0\right\} \Rightarrow t^* = \frac{\ln\left(-\dfrac{b^*}{b_0 - b^*}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+R}{1+n}\right)}$$

- Si R>n:
  Existe un instante de tiempo finito para el cual el nivel de endeudamiento se hace cero. Para ello debe ocurrir que $b^* > 0$ y $b_0 < b^*$, es decir, que $d < 0$ (en el caso que la autoridad fiscal no pueda apelar al banco central) o que $d - m(\theta/(1+\theta))$<0 (en el caso en que la autoridad fiscal sí pueda apelar al banco central). El tiempo que tarda en amortizarse la deuda será:

$$\left\{t^* : b_{t^*} = 0\right\} \Rightarrow t^* = \frac{\ln\left(-\dfrac{b^*}{b_0 - b^*}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+R}{1+n}\right)}$$

ESTABILIZACIÓN DE LA DEUDA

Es posible que un gobierno quiera actuar para estabilizar el nivel de endeudamiento actual ya que, en caso contrario podría éste seguir una dinámica explosiva (supóngase el caso de $R>n$ y $b_0 > b^* > 0$, por ejemplo). La estabilización consiste en aplicar una política fiscal (usar los instrumentos fiscales para controlar d) o una política monetaria (aplicar los instrumentos monetarios para controlar θ, sólo en caso de que la autoridad fiscal pueda apelar al banco central) tal que el nivel de deuda actual (b_0) se convierta en un nivel de deuda de estado estacionario. De este modo el nivel de deuda actual será estable tras la puesta en marcha de tal política.

Analíticamente:

POLÍTICA FISCAL: Sea d el déficit primario antes de poner en marcha la política fiscal.

Computar $d': b_0 = b^*{}',$ donde $b^*{}' = \begin{cases} \dfrac{d' - m\dfrac{\theta}{1+\theta}}{1-(1+R)/(1+n)}, & \text{ó} \\ \dfrac{d'}{1-(1+R)/(1+n)} \end{cases}$

dependiendo de si puede o no apelar al B.C.

$$d' = \begin{cases} b_0\left(1 - \dfrac{1+R}{1+n}\right) + m\dfrac{\theta}{1+\theta}, & \text{ó} \\ b_0\left(1-(1+R)/(1+n)\right) \end{cases}$$

Nótese que si $d' < (>) d$, entonces la política fiscal será contractiva (expansiva).

POLÍTICA MONETARIA (sólo en el caso de que se pueda apelar al B.C.). Sea θ el crecimiento monetario antes de poner en marcha la política monetaria:

Computar θ': $b_0 = b^*{}' = \dfrac{d - m\dfrac{\theta'}{1+\theta'}}{1-(1+R)/(1+n)}$, es decir,

$$\theta' = \frac{1}{\dfrac{m}{d - b_0\left(1-(1+R)/(1+n)\right)} - 1},$$

Nótese que si $\theta' < (>) \theta$, entonces la política monetaria será contractiva (expansiva).

DINÁMICA DEL DÉFICIT Y DEL AHORRO

Ahorro privado:

$$S_t = M_t - M_{t-1} + B_t - B_{t-1} + I_t$$

Dividiendo por la renta nominal ($P_t Y_t$) y reorganizando términos se llega a:

$$b_t = s - i - m\frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta}b_{t-1},$$

donde

$$s \equiv \frac{S_t}{P_t Y_t}, i \equiv \frac{I_t}{P_t Y_t}, m \equiv \frac{M_t}{P_t Y_t}, 1+\theta = (1+\pi)(1+n), \forall t.$$

Capacidad máxima de financiar al sector público en el estado estacionario:

$$\tilde{b}^* = (s-i)\frac{1+\theta}{\theta} - m$$

Estudiando algunos casos:

1. Si $d \leq s - i - m\frac{\theta}{1+\theta}$ y $\frac{1+R}{1+n} \leq \frac{1}{1+\theta}$ entonces el sector privado siempre podrá absorber la deuda generada por el sector público.
2. Si $d \leq s - i - m\frac{\theta}{1+\theta}$ y $1 > \frac{1+R}{1+n} > \frac{1}{1+\theta}$ entonces:

A) Si $b^* < \tilde{b}^* \Rightarrow$ deuda factible si $b_0 < \hat{b}$, donde

$\hat{b}$ es tal que $b_t^{S.Pu.} = b_t^{S.\mathrm{Pr}.}$, es decir,

$$\hat{b} = \frac{s - i - m\dfrac{\theta}{1+\theta} - d}{\dfrac{1+R}{1+n} - \dfrac{1}{1+\theta}}.$$

B) Si $b^* > \tilde{b}^* \Rightarrow \exists t^*$ tal que la deuda será infactible.

En este caso, si b_0 es factible, podría ponerse en marcha una política fiscal (contractiva) o monetaria (contractiva) que moviera la recta de endeudamiento o la frontera factible.

3. Si $d > s - i - m\dfrac{\theta}{1+\theta}$ y $\dfrac{1+R}{1+n} < \dfrac{1}{1+\theta}$ entonces:

A) Si $b^* < \tilde{b}^* \Rightarrow$ deuda factible si $b_0 > \hat{b}$, donde

$\hat{b}$ es el mismo que el definido en el caso 2).

B) Si $b^* > \tilde{b}^* \Rightarrow \exists t^*$ tal que la deuda será infactible.

En este caso, si b_0 es factible, podría ponerse en marcha una política fiscal (contractiva) o monetaria (contractiva) que moviera la recta de endeudamiento o la frontera factible.